

绝密 ★ 考试结束前

全国 2018 年 4 月高等教育自学考试

复变函数与积分变换试题

课程代码:02199

请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

选择题部分

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

2. 每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题:本大题共 12 小题,每小题 3 分,共 36 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的,请将其选出。

1. 设复数 $z = 1 - i$, 则 $\arg z =$

A. $-\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{3}{4}\pi$

D. $\frac{5\pi}{4}$

2. 设 z 为非零复数, a, b 为实数且 $\frac{z}{\bar{z}} = a + bi$, 则 $a^2 + b^2$

A. 等于 0

B. 等于 1

C. 小于 1

D. 大于 1

3. 函数 $f(z) = \bar{z}$ 在 $z = 0$ 处

A. 解析

B. 可导

C. 不连续

D. 连续

4. 设 $z = x + iy$, 则下列函数为解析的是

A. $f(z) = x^2 - y^2 + i2xy$

B. $f(z) = x - iy$

C. $f(z) = x + i2y$

D. $f(z) = 2x + iy$

5. 设 C 为正向圆周 $|z|=1$, 则 $\oint_C \bar{z} dz =$
- A. $6\pi i$ B. $4\pi i$ C. $2\pi i$ D. 0
6. 设 C 为正向圆周 $|z|=1$, 则 $\oint_C \frac{dz}{z(z-2)} =$
- A. $-\pi i$ B. 0 C. πi D. $2\pi i$
7. 设 C_1, C_2 分别是正向圆周 $|z|=1$ 与 $|z-2|=1$, 则 $\frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{C_1} \frac{e^z}{z-2} dz + \oint_{C_2} \frac{\sin z}{z-2} dz \right) =$
- A. $2\pi i$ B. $\sin 2$ C. 0 D. $\cos 2$
8. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n} z^n$ 的收敛半径为
- A. 0 B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C. $\sqrt{2}$ D. 2
9. 点 $z=0$ 是函数 $f(z) = \frac{(e^z - 1)\sin z}{z^2(z-1)}$ 的
- A. 本性奇点 B. 一阶极点
C. 二阶极点 D. 可去奇点
10. 已知 $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, 则 $\text{Res}\left[\frac{\sin z}{z^4}, 0\right] =$
- A. 1 B. $\frac{1}{3!}$
C. $-\frac{1}{3!}$ D. -1
11. 函数 $w = \frac{z-i}{z+i}$ 将上半平面 $\text{Im } z > 0$ 映射成
- A. $\text{Im } w < 0$ B. $\text{Im } w > 0$
C. $|w| > 1$ D. $|w| < 1$
12. 下列傅氏变换和逆变换中正确的是
- A. $F[\delta(t)] = i\omega$ B. $F[1] = 2\pi\delta(\omega)$
C. $F^{-1}[\delta(\omega)] = 1$ D. $F^{-1}[1] = u(t)$

非选择题部分

注意事项:

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上,不能答在试题卷上。

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。

13. 复数 $-1+i$ 的指数形式为_____.

14. 若在区域 $x > 0$ 内 $f(z) = a \ln(x^2 + y^2) + i \arctan \frac{y}{x}$ 为解析函数, 则 $a =$ _____.

15. 函数 e^z 的基本周期为_____.

16. 积分 $\int_1^2 2z \sin(z^2) dz =$ _____.

17. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 4, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n}$ 的收敛半径为_____.

三、计算题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

18. 设 $f(z) = (y^3 - 3x^2y) + i v(x, y)$ 为解析函数, 求 $v(x, y)$.

19. 设 C 为正向圆周 $|z-2|=1$, 求 $\oint_C \frac{1}{z(z-2)^2} dz$.

20. 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, 求 $\oint_C \frac{\sin z}{z^2+1} dz$.

21. 将 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域 $1 < |z| < 2$ 内展开为洛朗级数.

22. 函数 $f(z) = \frac{1}{(z^2-1)(z-i)}$ 在以 $z=1$ 为中心的哪几个圆环域内可展开为洛朗级数?

(不要求写出展开式).

23. 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, 求 $\oint_C \frac{1}{\cos z} dz$.

四、综合题: 本大题共 3 小题, 共 19 分。

24. (本题 6 分)

$$\text{设 } f(z) = \frac{1}{1+z^2}.$$

(1) 求 $f(z)$ 在上半平面的奇点;

(2) 求 $f(z)e^{iaz}$ 在这些奇点处的留数;

(3) 设 $\alpha > 0$, 计算 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx$.

25. (本题 6 分)

设 D 为 z 平面上的区域 $0 < \operatorname{Im} z < \pi$, 试求下列保形映射:

(1) $w_1 = f_1(z)$ 把 D 映射成 w_1 平面上的上半平面 $\operatorname{Im} w_1 > 0$;

(2) $w = f_2(w_1)$ 把 $\operatorname{Im} w_1 > 0$ 映射成 w 平面上的单位圆盘 $|w| < 1$;

(3) $w = f(z)$ 把 z 平面上的区域 D 映射成 w 平面上的单位圆盘 $|w| < 1$.

26. (本题 7 分)

利用拉氏变换解满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 的微分方程 $y''(t) + y(t) = e^t$.